Calcolo della terza armonica
Si supponga di avere una funzione del tipo
$$f(\alpha) = \sin(\alpha) + k\sin(3\alpha)$$
La derivata prima risulta
$$f'(\alpha) = -\cos(\alpha) - 3k\cos(3\alpha)$$
Ponendo uguale a zero la derivata trovo i punti di minimo, massimo o flesso tangente orizzontale.
Cerco, in queste condizioni, il legame tra k e α.
$$0 = -\cos(\alpha) - 3k\cos(3\alpha)$$
quindi
$$\cos(\alpha) + 3k\cos(3\alpha) = 0$$
ma
$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) &= \cos(\alpha)\cos(2\alpha) - \sin(\alpha)\sin(2\alpha) = \cos(\alpha)\left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\right) - 2\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)\\ &= \cos^3(\alpha) - 3\sin^2(\alpha)\cos(\alpha) = \cos(\alpha)\left(\cos^2(\alpha) - 3\sin^2(\alpha)\right)\\ &= \cos(\alpha)\left(\cos^2(\alpha) - 3 + 3\cos^2(\alpha)\right) = \cos(\alpha)\,(4\cos^2(\alpha) - 3)\end{aligned}$$
quindi
$$\cos(\alpha) + 3k\cos(\alpha)\,(4\cos^2(\alpha) - 3) = \cos(\alpha)\,(1 + 12k\cos^2(\alpha) - 9k) = 0$$
una prima soluzione è $\cos(\alpha)=0$ che corrisponde al minimo o massimo (a seconda del segno di k) corrispondente a 90°.
L'altra soluzione è
$$1 + 12k\cos^2(\alpha) - 9k = 0$$
Da questa relazione si ottiene il legame (non lineare) tra k e α
$$\cos^2(\alpha) = \frac{\frac{-1}{3k} + 3}{4} = \frac{-1}{12k} + \frac{3}{4}$$
Ritornando alla funzione f(α) e ricordando che
$$\begin{aligned}\sin(3\alpha) &= \sin(\alpha)\cos(2\alpha) + \cos(\alpha)\sin(2\alpha) = \sin(\alpha)\left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\right) + 2\cos^2(\alpha)\sin(\alpha)\\ &= -\sin^3(\alpha) + 3\sin^2(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(\alpha)\left(3\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\right) = \sin(\alpha)\,(4\cos^2(\alpha) - 1)\end{aligned}$$
quindi f(α) diventa:
$$f(\alpha) = \sin(\alpha) + k\sin(3\alpha) = \sin(\alpha) + k\sin(\alpha)\,(4\cos^2(\alpha) - 1) = \sin(\alpha)\,(1 + k(4\cos^2(\alpha) - 1))$$
Ma nelle condizioni di massimo/minimo si può sostituire il legame tra k e α ottenendo
$$\begin{aligned}\sin(\alpha)\left(1 + k(4\cos^2(\alpha) - 1)\right) &= \sin(\alpha)\left(1 + k\left(4\frac{-1}{12k} + \frac{3}{4} - 1\right)\right) = \sin(\alpha)\left(1 + k\left(\frac{-1}{3k} + 3 - 1\right)\right)\\ &= \sin(\alpha)\left(1 - \frac{1}{3} + 2k\right) = \sin(\alpha)\left(\frac{2}{3} + 2k\right)\end{aligned}$$
il sin(α) si ottiene dallo stesso legame
$$\sin(\alpha) = \sqrt{\sin^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \sqrt{1 + \frac{1}{12k} - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12k}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{3k}}$$
quindi, nelle condizioni di massimo/minimo, si ha
$$\sin(\alpha)\left(\frac{2}{3} + 2k\right) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{3k}}\left(\frac{2}{3} + 2k\right)$$
Se ora cerco il minimo/massimo dei minimi/massimi al variare di k, devo trovare la soluzione che si ottiene dall'annullamento della derivata di tale funzione rispetto a k

$$0=\frac{d\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{3k}}\left(\frac{2}{3}+2k\right)\right)}{dk}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{3}(-1)k^{-2}\left(1+\frac{1}{3k}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}+2k\right)+2\sqrt{1+\frac{1}{3k}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{-1}{6}k^{-2}}{\sqrt{1+\frac{1}{3k}}}\left(\frac{2}{3}+2k\right)+2\sqrt{1+\frac{1}{3k}}\right]=\frac{1}{2}\frac{-\frac{1}{9}k^{-2}-\frac{1}{3}k^{-1}+2+\frac{2}{3}k^{-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{3k}}}$$

L’uguaglianza a 0 è soddisfatta se il numeratore è nullo

$$-\frac{1}{9}k^{-2}+2+\frac{1}{3}k^{-1}=0$$

che si traduce in

$$18k^2+3k-1=0$$

che porta a due soluzioni: k=-1/3 e k=1/6. Il primo valore corrisponde al caso di due flessi nell’origine (e a 180°) (quando i due massimi della prima e terza armonica si sommano) mentre il secondo corrisponde al minimo (il massimo della prima si sottrae al massimo della terza).